wtorek, 15 lipca 2025

Zadanie 1. Prostą na płaszczyźnie nazwiemy *słoneczną*, jeśli **nie** jest równoległa ani do osi x, ani do osi y, ani do prostej $x + y = 0$.

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite k, dla których istnieje n różnych prostych na płaszczyźnie spełniających następujące dwa warunki:

- dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych a i b takich, że $a + b \leqslant n + 1$, punkt (a, b) należy do co najmniej jednej z tych prostych;
- dokładnie k spośród tych n prostych jest słonecznych.

Zadanie 2. Niech Ω i Γ będą okręgami o środkach odpowiednio w punktach M i N, przy czym promień Ω jest mniejszy od promienia Γ. Załóżmy, że okręgi Ω i Γ przecinają się w dwóch różnych punktach A i B. Prosta MN przecina Ω w punkcie C, a Γ w punkcie D w taki sposób, że punkty C, M, N i D leżą na tej prostej w podanej kolejności. Punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACD. Prosta AP przecina ponownie Ω w punkcie $E \neq A$. Prosta AP przecina ponownie Γ w punkcie $F \neq A$. Punkt H jest ortocentrum trójkąta PMN.

Udowodnić, że prosta przechodząca przez H i równoległa do AP jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie BEF.

(*Ortocentrum* trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości.)

Zadanie 3. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Funkcję $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazwiemy *bonza*, jeśli

$$f(a) \ \text{ dzieli } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych a i b.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą c taką, że $f(n) \leqslant cn$ dla wszystkich funkcji bonza f i wszystkich dodatnich liczb całkowitych n.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

środa, 16 lipca 2025

Zadanie 4. *Dzielnikiem właściwym* dodatniej liczby całkowitej N nazywamy każdy dodatni dzielnik N różny od N.

Dany jest nieskończony ciąg $a_1, a_2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych, z których każda ma co najmniej trzy dzielniki właściwe. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ liczba a_{n+1} jest sumą trzech największych dzielników właściwych liczby a_n.

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości a_1.

Zadanie 5. Ala i Bartek grają w *australijską grę*, czyli dwuosobową grę, której reguły zależą od dodatniej liczby rzeczywistej λ, znanej obu graczom. W n-tej rundzie gry (zaczynając od $n = 1$) zachodzi następująca sytuacja:

- Jeśli n jest nieparzyste, Ala wybiera nieujemną liczbę rzeczywistą x_n taką, że
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$
- Jeśli n jest parzyste, Bartek wybiera nieujemną liczbę rzeczywistą x_n taką, że
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Jeśli którykolwiek z graczy nie może wybrać odpowiedniej liczby x_n to gra kończy się, a przeciwnik wygrywa. Jeśli gra trwa w nieskończoność, nikt nie wygrywa. Wszystkie wybrane liczby są znane obu graczom.

Wyznaczyć wszystkie wartości λ, dla których Ala ma strategię wygrywającą, oraz wszystkie, dla których strategię wygrywającą ma Bartek.

Zadanie 6. Rozważmy siatkę 2025×2025 kwadratów jednostkowych. Matylda chce ustawić na niej prostokątne płytki, być może o różnych wymiarach, tak aby każda krawędź każdej płytki leżała na linii siatki, a każdy kwadrat jednostkowy był pokryty przez co najwyżej jedną płytkę.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę płytek, które Matylda musi ustawić, tak aby każdy wiersz i każda kolumna siatki zawierały dokładnie jeden kwadrat jednostkowy niepokryty przez żadną płytkę.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.