wtorek, 16. lipca 2024

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie takie liczby rzeczywiste α, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \ldots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

jest wielokrotnością n. (Napis $\lfloor z \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą z. Przykładowo $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ i $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2{,}9 \rfloor = 2$.)

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieją takie dodatnie liczby całkowite g i N, że

$$\mathrm{NWD}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

dla wszystkich liczb całkowitych $n \geqslant N$. (Napis $\mathrm{NWD}(x, y)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb całkowitych x i y.)

Zadanie 3. Dany jest nieskończony ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oraz dodatnia liczba całkowita N. Załóżmy, że dla każdego $n > N$ liczba a_n jest równa liczbie wystąpień liczby a_{n-1} w ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Wykazać, że co najmniej jeden z ciągów $a_1, a_3, a_5, \ldots$ i $a_2, a_4, a_6, \ldots$ jest od pewnego miejsca okresowy.

(Nieskończony ciąg $b_1, b_2, b_3, \ldots$ jest *od pewnego miejsca okresowy* jeśli istnieją takie dodatnie liczby całkowite p i M, że $b_{m+p} = b_m$ dla każdego $m \geqslant M$.)

Language: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

środa, 17. lipca 2024

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC < BC$. Niech ω i I będą odpowiednio okręgiem wpisanym w trójkąt ABC oraz środkiem ω. Niech X będzie takim punktem na prostej BC różnym od C, że prosta przechodząca przez X i równoległa do AC jest styczna do ω. Podobnie, niech Y będzie takim punktem na prostej BC różnym od B, że prosta przechodząca przez Y i równoległa do AB jest styczna do ω. Niech prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie $P \neq A$. Niech K i L będą odpowiednio środkami odcinków AC i AB.

Dowieść, że $\sphericalangle KIL + \sphericalangle YPX = 180^\circ$.

Zadanie 5. Ślimak Turbo gra w grę na planszy o 2024 rzędach i 2023 kolumnach. Na 2022 polach znajdują się ukryte potwory. Na początku Turbo nie wie, gdzie znajdują się potwory, ale wie, że w każdym rzędzie poza pierwszym i ostatnim jest dokładnie jeden potwór oraz w każdej kolumnie znajduje się co najwyżej jeden potwór.

Turbo próbuje przejść z pierwszego rzędu do ostatniego rzędu. W każdej próbie wybiera pole w pierwszym rzędzie, z którego zaczyna wędrówkę, a następnie porusza się po planszy, za każdym razem przechodząc do sąsiedniego pola mającego wspólny bok z polem, na którym się znajduje. (Turbo może odwiedzać wcześniej odwiedzone pola.) Jeśli Turbo wejdzie na pole z potworem, jego próba kończy się i Turbo zostaje przeniesiony do pierwszego rzędu, skąd rozpoczyna kolejną próbę. Potwory nie poruszają się, a Turbo pamięta, na których dotychczas odwiedzonych polach znajdują się potwory. Gdy Turbo dotrze do któregokolwiek pola w ostatnim rzędzie, jego próba kończy się i gra jest zakończona.

Wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą n, dla której Turbo ma strategię gwarantującą dotarcie do ostatniego rzędu w n-tej próbie lub wcześniej, niezależnie od pól zajmowanych przez potwory.

Zadanie 6. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych. Funkcję $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ nazwiemy *wodnistą* jeśli spełniona jest następująca własność: dla każdych $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{lub} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita c, że dla każdej wodnistej funkcji f istnieje co najwyżej c różnych liczb wymiernych postaci $f(r)+f(-r)$ dla pewnej liczby wymiernej r oraz znaleźć najmniejszą możliwą wartość c.

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.